

La symétrie

Une séquence du projet *Les découvertes en pays d'Islam*

Résumé

Cette séquence a un double objectif : elle permet aux élèves de découvrir, de définir et de construire la symétrie, et concourt également à leur développement culturel en leur offrant une opportunité de découvrir une civilisation à travers son art. Après avoir observé et décrit des mosaïques décoratives pour construire une première définition du mot « symétrie », ils s'approprient un motif étoilé qui leur servira à la construction d'une frise.

La symétrie

Sciences et arts en pays d'Islam : l'exemple de la symétrie 104

Bernard Maitte

Quand les zelliges entrent dans la classe... 111

Étude de la symétrie

Marc Moyon

Texte pour enfants 127

Anne Fauche

Sciences et arts en pays d'Islam : l'exemple de la symétrie

Éblouissements

Regardons cette frise sculptée sur un panneau de bois et conservée au musée d'Art islamique du Caire (voir la figure 1). Nous voyons apparaître, en bas, un même motif : une étoile et un polygone, reportés à peu près identiquement à intervalles égaux par une translation. Ce dessin est très



Figure 1

fortement géométrisé. Observons maintenant ce panneau incrusté de motifs

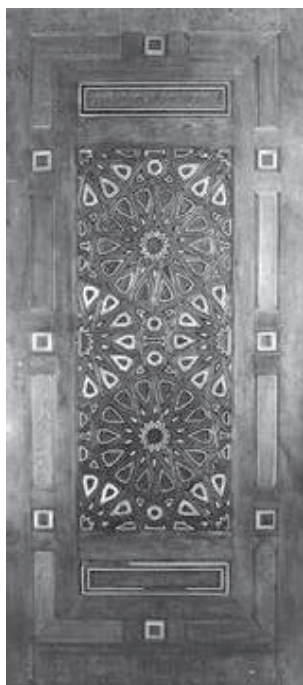


Figure 2

d'ivoire provenant d'une porte de bois conservée dans le même musée (voir la figure 2). Là aussi nous voyons apparaître des motifs géométriques : des étoiles à quatorze branches. La partie droite de la porte dessinée sur un papier-calque se reporte par miroir sur la partie gauche, de même que la moitié supérieure sur la partie inférieure. En fait, il faut étudier le quart du panneau pour connaître l'ensemble. Prenons cette calligraphie (voir la figure 3) : elle est symétrique, de même que ce claustra (voir la figure 4). Si nous considérons cet assemblage de carreaux de céramique, au-delà des décors différents des divers éléments, c'est la répétition d'un pavage hexagonal qui retient



Figure 3

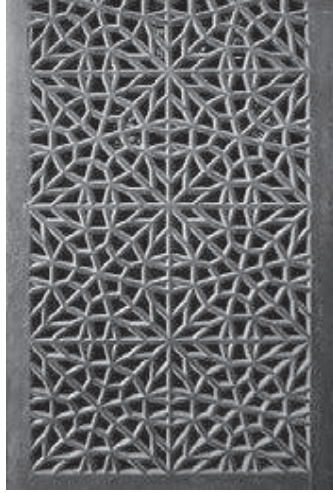


Figure 4



Figure 5

l'attention (voir la figure 5), de même que sur cette autre décoration, ce sont les étoiles à douze branches régulières répétées qui s'observent (voir la figure 6). Sur ce pavage, on voit se dessiner un réseau très coloré de formes simples qui se répètent selon des lignes (voir la figure 7). On dit que c'est un « réseau à deux dimensions ». Sur la figure 8, le réseau est plus complexe, il s'étend aux trois dimensions de l'espace, en volume. Il peut appartenir, comme ici, à un portail monumental, un iwan, ou sembler maintenir vers le ciel les coupes. Ces pendentifs en stalactites convexes ou concaves, plus décoratifs que structuraux, sont nommés « muqarnas ». Les motifs géométriques apparaissent aussi sur les tapis et dans toutes les réalisations de l'art islamique, à tel point que l'observateur le moins attentif est tenté de caractériser celui-ci par le recours aux triangles, carrés, pentagones, hexagones, heptagones, octogones, dodécagones, etc., par l'enchevêtrement de ces figures « simples » en savants entrelacs, par ce qui est d'ailleurs connu sous le nom d'« arabesques ».

Dès les premières constructions de mosquées (le dôme du Rocher à Jérusalem – 692 –, la mosquée des Omeyyades à Damas – 714) apparaissent les représentations florales, dérivées de l'art byzantin, comme en dérivent aussi les chapiteaux de notre art roman. Elles s'y enrichissent de l'utilisation de motifs décoratifs symétriques, de pavages des plans. Avec le développement des villes, cette utilisation systématique de la symétrie migre dans l'architecture civile, grâce à la virtuosité des artisans locaux – Grecs, Syriens, Coptes –, qui adaptent leurs techniques aux exigences de leurs

Les Découvertes en pays d'Islam

nouveaux maîtres. Vers les ^{x^e} et ^{xi^e} siècles, les divers métiers d'artisans et d'artistes islamiques permettent une expansion fulgurante de cet art dans les mosquées, les palais, les collèges supérieurs, les bibliothèques, les hôpitaux, les caravansérails, les établissements de bains,

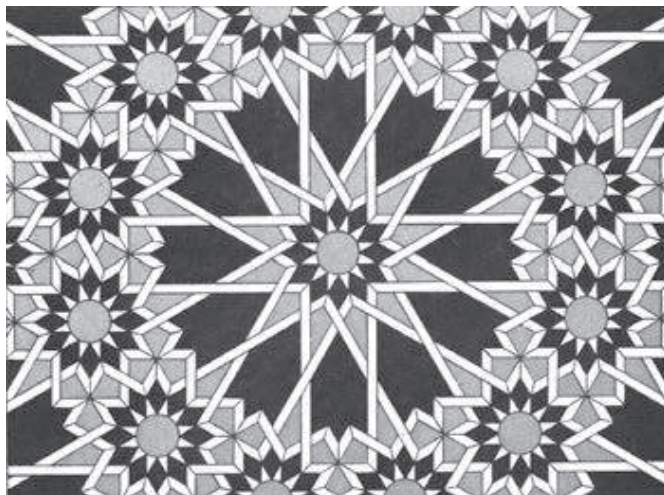


Figure 6

jusqu'aux intérieurs des particuliers. L'art islamique a alors trouvé son langage propre, qui s'étend sur tout le territoire de l'empire, des Indes à l'al-Andalus. Il possède une remarquable unité s'imposant au-delà des particularismes régionaux. Certains voient dans l'hégémonie du recours à la géométrie dans l'art la conséquence de l'interdiction faite par la religion musulmane de représenter la figure humaine. Mais celle-ci se rencontre fréquemment dans l'est de l'empire sans que la prégnance du motif géométrique soit contestée. À peine un œil exercé peut-il déceler que la symétrie est souvent légèrement transgressée en Iran – pour représenter la vie –, alors qu'elle est rigoureuse à l'ouest.

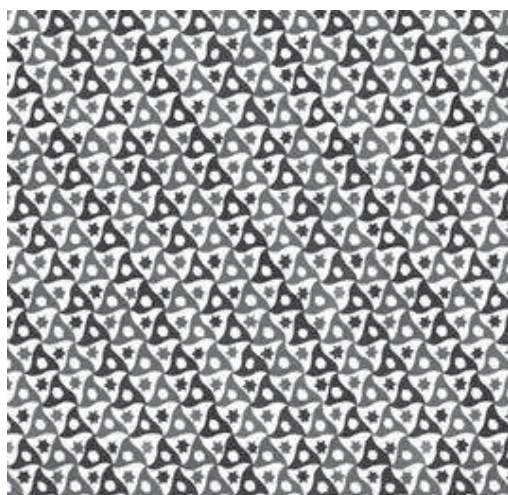


Figure 7

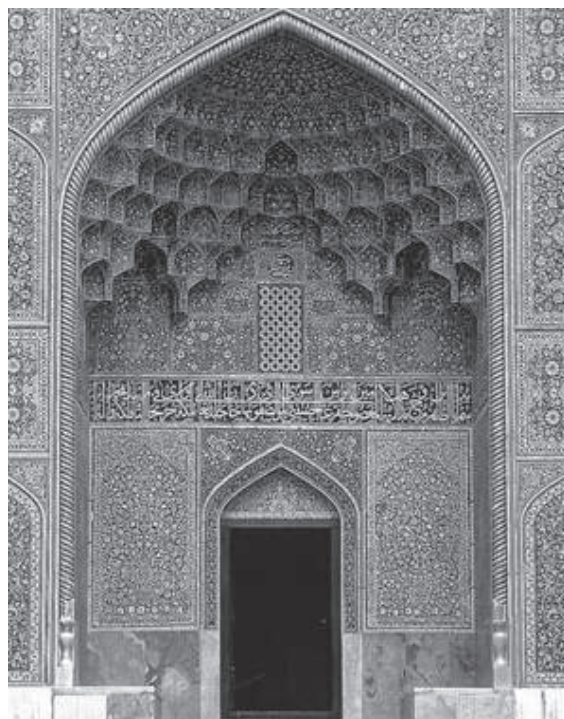


Figure 8

La symétrie et l'art en pays d'Islam

Quelles sont les caractéristiques de cette liaison entre la science géométrique et cet art abstrait qui use tant de la géométrie ? La description que j'ai faite au début de cet article de frises, panneaux de portes, carrelages et muqarnas recourait à une analyse d'œuvres achevées. Je pouvais y convoquer les éléments de transformation que la science a pu abstraire au cours de son histoire : les translations, les rotations, les inversions par rapport à un miroir. Cette démarche faite *a posteriori* n'a rien à voir avec la pratique des artistes et artisans auteurs de ces œuvres. Ceux-ci se donnent comme défi de couvrir un espace. Pour cela, ils utilisent un motif géométrique qu'ils répètent. Toutes les proportions utilisées sont déterminées par la surface à emplir et par les nécessités de la répétition. Idéalement, celle-ci peut être faite « à l'infini ». Il y a donc réalisation de ce que nous appelons actuellement un « réseau périodique ». Mais la manière de remplir l'espace est simple si on répète des parallélépipèdes quelconques, rectangles, carrés, hexagones (voir la figure 5). Elle l'est moins si le motif est pentagonal, heptagonal, octogonal... ou quelconque. Il faut alors relier la figure choisie (par exemple un sceau de Salomon) par d'autres motifs construits de manière à respecter une symétrie et à assurer la continuité du trait. Tout l'art du puzzle est là. Il prête à de nombreuses variations en fonction des symétries introduites, des couleurs sélectionnées. Les artistes en pays d'Islam utilisaient toujours un minimum de formes différentes, dans une économie d'action bien pensée, afin d'apporter de la variété à l'unité. La déclinaison des possibles grâce à la virtuosité acquise entraîne bien des résultats agréables et surprenants, force l'admiration.

L'art islamique est un art collectif – jamais une œuvre n'est signée – qui unit les réalisations particulières de nombreux corps de métier dans un même ensemble. Les décorateurs, paveurs, ébénistes, carreleurs, etc., ne sont pas dirigés par un maître d'œuvre qui leur impose un programme mais chacun contribue à l'unité de la réalisation. Pour cela, ils puisent dans la tradition mais inventent aussi des variations qui enrichissent le répertoire commun. Un motif apparaît-il qu'il est repris, décliné sur tous les supports, dans toutes les techniques. Ce n'est que beaucoup plus tard, et de manière extérieure à ce milieu d'artistes et d'artisans, qu'un grand mathématicien

persan, mort en 1429, al-Kâshî, a consacré un chapitre de son célèbre livre *La Clé du calcul* à la géométrie décorative et aux procédés qui permettent de construire et d'orner portes, fenêtres, murs, coupoles. Il ne faut donc pas imaginer que des architectes instruits de mathématiques et de géométrie pensent un ensemble. Celui-ci résulte de la mise en harmonie de pratiques qui, ultérieurement, seront décrites et abstraites par les mathématiciens.

C'est un peu le même phénomène qui s'était produit en Grèce : les pratiques d'arpentage et de mesure de champs avaient fait naître la décomposition de figures complexes en assemblages de figures simples, puis à l'étude de ces figures pour elles-mêmes et en elles-mêmes, sans avoir recours à un attribut quelconque. Cette idéalisation des figures (les triangles, carrés, etc.) et l'étude de leurs propriétés marquèrent la naissance de cette science abstraite qu'est la géométrie, tout comme les pratiques de comptage firent naître l'arithmétique et comme l'étude de l'équilibre de la balance par Archimède permit de partir du concret des plateaux et du fléau pour le généraliser aux notions d'égalité, d'inégalité, de bras de levier, etc., c'est-à-dire de partir de l'étude des formes pour aboutir à un outil de raisonnement.

Rationalité technique et rationalité scientifique

En ce sens, l'art islamique présente à nos yeux ce que nous ne devrions jamais oublier : nos connaissances résultent de la longue quête effectuée par l'esprit humain, qui se nourrit à la fois de pratique et d'abstraction. Les techniques sont apparues les premières dans l'histoire de l'humanité. Elles ont progressé par observations, essais, erreurs, réussites, améliorations de tours de main, analyses de ces pratiques. Cette forme de rationalité est centrée sur le projet à réaliser, sur les outils à mettre en œuvre pour atteindre le but fixé. La rationalité scientifique est autre. Elle est venue beaucoup plus tard et privilégie l'approche d'une construction théorique. Les penseurs qui se sont adonnés à cette démarche visaient, par exemple, l'étude abstraite de structures pour gagner une économie de pensée, voulaient aussi étudier l'homme, ses actions, ses sensations pour apprendre comment fonctionne notre pensée. Ils ont relié celles des réalisations qui présentaient des

ressemblances pour les décrire de manière homogène, puis ont épanoui pour elle-même la logique ainsi découverte. La science en pays d'Islam a été la première – par l'invention de la méthode expérimentale – à placer la recherche logique sous le contrôle de l'expérience.

La méthode expérimentale : un autre apport de la pensée technique à la pensée dialectique

En Occident, depuis la Renaissance, la science moderne est fécondée par les apports de la rationalité technique, comme celle-ci s'enrichit de la pensée théorique : les deux approches sont nécessaires et indispensables. Les exemples ne manquent pas – la mesure du temps par les cadrans solaires, puis par les horloges à poids, avant que la découverte des lois du pendule ne permette la fabrication d'horloges à balancier ; les machines à feu, découvertes par des techniciens de génie, avant que l'étude de leur faible rendement ne fasse naître la thermodynamique...

Mais revenons à l'histoire de l'art islamique. Il gisait là, témoin de la splendeur passée de la civilisation qui l'avait vu naître, lorsque les mathématiciens occidentaux du ^{xix}^e siècle ont voulu, à la suite d'Évariste Galois, penser les structures mathématiques. À la même époque, les cristallographes se posaient le problème de répéter dans l'espace un système de points (pouvant être assimilés à des atomes). Vers les années 1870, ces deux catégories de scientifiques, physiciens et mathématiciens, indépendamment l'une de l'autre, en vinrent à établir qu'il ne pouvait y avoir que dix-sept façons de paver l'espace plan. Ils démontrèrent qu'il n'y a que dix-sept types de réseaux plans. Au début du ^{xx}^e siècle, on s'aperçut que tous ces réseaux étaient réunis dans le seul Alhambra de Grenade, datant du ^{xiv}^e siècle. La nouvelle fit sensation et incita la science théorique la plus récente d'alors à se pencher sur les réalisations de l'art islamique. Cet intérêt se renforça un demi-siècle plus tard, alors que se développaient dans la physique des matériaux les premières applications pratiques des groupes de symétrie, pour interpréter les études effectuées aux rayons X. Dans l'état actuel de nos connaissances, nul savant en pays d'Islam n'avait cherché à dénombrer les groupes plans, mais les artisans avaient voulu apporter dans

Les Découvertes en pays d'Islam

une œuvre insigne le plus de diversité possible pour trouver une unité, avaient fait preuve d'un esprit inventif fécond... En 1981, un groupe de scientifiques rencontra dans des études aux rayons X des types de réseaux « interdits » par les pavages réguliers, c'est-à-dire présentant des symétries pentagonales. La persistance d'expériences analogues amena à concevoir des « réseaux quasi périodiques », que possèdent les « quasi-cristaux », sujets passionnants de recherches et de découvertes actuelles. L'étude *a posteriori* de cette découverte vient de révéler que ces symétries sont présentes dans des motifs décoratifs islamiques, dans les projections planes de muqarnas aussi. Ils avaient d'ailleurs été décrits aussi par des artistes comme Dürer (voir la figure 9) ou par des scientifiques techniciens comme Simon Stevin. Une leçon de modestie par rapport aux artisans anonymes qui œuvraient à développer l'art en pays de l'Islam et une marque de tout l'intérêt que pourrait tirer la science la plus contemporaine de l'étude des autres champs de la pensée et de la pratique humaines.

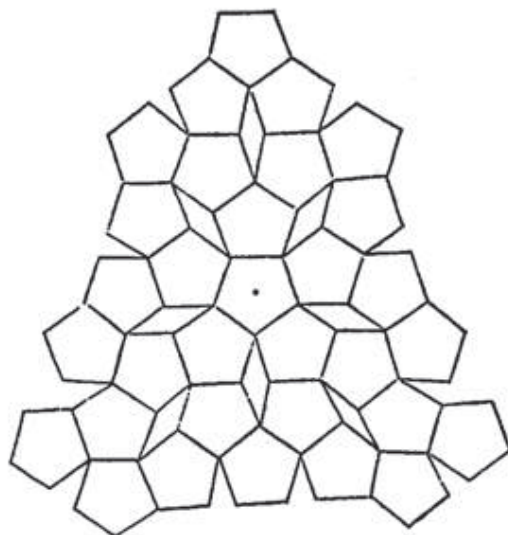


Figure 9

Bibliographie

Jean-Marc Castéra, *Arabesques : art décoratif au Maroc*, Courbevoie, ACR Éditions, 1996.

Bernard Maitte, « Une histoire des quasi-cristaux », *Alliage*, n° 39, 1999, p. 49-57.

Quand les zelliges entrent dans la classe...

Étude de la symétrie

Introduction

Les artisans des pays d'Islam utilisent les propriétés mathématiques et artistiques de la rotation, de la symétrie et du pavage, c'est-à-dire du recouvrement du plan par un motif pour leurs créations de représentations géométriques. Ils embellissent ainsi de nombreuses réalisations architecturales (maisons, palais, mosquées, hôpitaux, madrasa, mausolées) et décorent différents types de livres (religieux, littéraires et même scientifiques). Par exemple, ils remplissent, à partir de cercles et de figures polygonales construites à la règle et au compas, un espace plan. Pour cela, ils utilisent notamment des petits carreaux d'argile la plupart du temps recouverts d'émail appelés « zelliges ». Ce sont ces mêmes carreaux que les artisans apportent chez Fadila et Nabil afin de restaurer une partie du mur de leur maison. Ceux-ci deviennent caractéristiques de l'architecture maroco-andalouse. Leur présence est attestée dès le XII^{e} siècle dans les minarets de la Koutoubia et de la Qasbah à Marrakech. Comme le précise le film d'animation, ils se retrouvent dans la décoration de plusieurs salles de l'Alhambra de Grenade, dont la construction date de la première moitié du XIV^{e} siècle. Sont également réalisés des motifs en trois dimensions appelés « muqarnas », soit comme éléments architecturaux constitutifs d'une voûte, soit comme décorations. Ils sont obtenus à partir de triangles, de carrés et de losanges. Au XV^{e} siècle, le mathématicien iranien al-Kâshî (mort en 1429) s'intéresse de manière scientifique à ces muqarnas en consacrant un chapitre entier de son *Miftâh al-hisâb* (*La Clé du calcul*) à leurs constructions et mesures.

Les Découvertes en pays d'Islam

La richesse de la géométrie présente dans les décorations islamiques lui confère une approche souvent ardue. Elle est représentée par des figures très élaborées. La construction de ces décorations repose principalement sur quatre transformations du plan : les symétries axiales et centrales, la translation et la rotation.

Ces quatre transformations, perceptibles par simple observation, intègrent les apprentissages de l'école et du collège. Ici, notre projet est de faire découvrir les caractéristiques de la symétrie axiale à travers ses manifestations artistiques dans les pays d'Islam. En effet, cette transformation est la seule au programme du cycle 3 et de la sixième. Les activités proposées pourront d'ailleurs faire l'objet d'un travail commun dans une liaison école-collège.

La symétrie axiale, aussi appelée « symétrie orthogonale », d'axe d est une transformation ponctuelle telle que si M' est l'image de M par rapport à d , alors d est la médiatrice de $[MM']$, c'est-à-dire la droite perpendiculaire à $[MM']$ et passant par son milieu. La droite d est alors un ensemble de points fixes : chacun de ses points est sa propre image.

Avant de décrire en détail les activités, nous désirons présenter les connaissances et compétences explicitement citées par les instructions officielles du cycle 3 travaillées ici. En plus des objectifs transversaux déjà décrits dans l'introduction de cet ouvrage, les activités que nous proposons dans la suite concourent à plusieurs objectifs notionnels :

- connaître et savoir utiliser le vocabulaire spécifique : points alignés, milieu d'un segment, droites perpendiculaires, droites parallèles, figures symétriques d'une figure donnée par rapport à une droite, axe de symétrie ; savoir effectuer les constructions et tracés correspondants ;
- utiliser les instruments (règle et compas) ;
- percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie et le vérifier en utilisant différentes techniques (pliage, calque) ;
- compléter une figure par symétrie axiale en utilisant des techniques telles que le pliage et le papier-calque ;
- reconnaître de manière perceptive une figure plane, donner son nom ;
- décomposer une figure complexe en figures simples.

À la découverte de la symétrie

C'est dans les classes de cycle 3 qu'une transformation géométrique – la symétrie axiale – sera enseignée pour la première fois. Devront alors en être dégagés les éléments caractéristiques ainsi que les principales propriétés géométriques (conservation des longueurs, des aires, etc.).

Une introduction générale peut être conduite à partir d'une recherche documentaire. L'enseignant répartit sa classe en plusieurs groupes qui travaillent séparément sur un lieu ou un bâtiment (historiques ou contemporains). On peut considérer, par exemple, en Espagne, l'Alhambra de Grenade, ou, au Maroc, la mosquée Hassan II de Casablanca, la mosquée al-Qarawiyyine de Fès ou bien le mausolée de Moulay Ismaïl de Meknès dont plusieurs seront cités ultérieurement. Les élèves doivent dégager un des points communs de tous ces lieux : la présence de riches représentations géométriques, caractéristiques des pays d'Islam et utilisées comme éléments de décoration.

L'observation doit être le point de départ de l'apprentissage. Comme le montrent le film d'animation ainsi que le texte pour enfants, elle permet, entre autres choses, de repérer un motif géométrique qui se répète et des axes de symétrie. Les élèves sont ensuite amenés à verbaliser le « retournement » du motif intrinsèque à la symétrie axiale.

Cette mosaïque (voir la figure 1) est la réplique des décorations réalisées à l'aide de zelliges. Reproduite en couleurs sur un papier transparent, elle est rétroprojetée en classe.

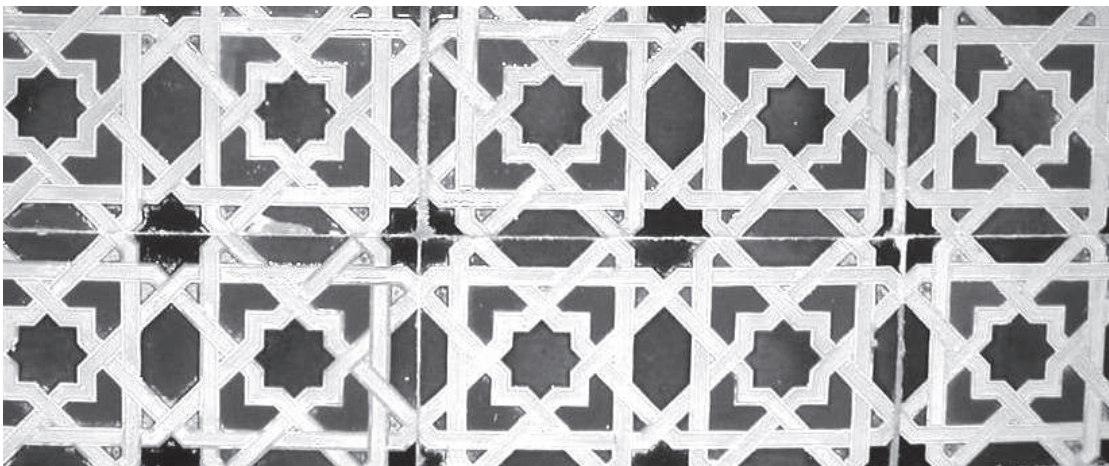


Figure 1 : Mosaïque d'un patio d'une construction moderne de Grenade (xx^e s.)

Les Découvertes en pays d'Islam

Dans un premier temps s'engage une discussion sur la description d'un élément qui, répété plusieurs fois, permet de reconstruire la mosaïque observée. Tous les élèves ne vont pas repérer le même élément ; un débat dans la classe peut être envisagé. Dans un second temps, l'observation doit permettre aux élèves de décrire les divers mouvements d'un élément constitutif (par exemple, voir les figures 2 et 3) qui leur permettent de construire l'ensemble. L'enseignant pourra alors manipuler cet élément en suivant pas à pas les consignes des élèves. Il aura donc prévu un nombre suffisant de copies de l'élément constitutif. Attention aux retournements que les élèves doivent mettre en évidence !

Pour les classes équipées d'un vidéoprojecteur, l'enseignant peut utiliser des fichiers Word ou Paint qui permettent, à partir du copier/coller et des options de retournement horizontal ou vertical, de visualiser la construction de la mosaïque. Dans la continuité, l'animation du site du projet sera visualisée comme bilan de l'activité. Ce film d'animation peut être l'occasion d'une phase d'écriture en demandant aux élèves de définir ce qu'est une symétrie.

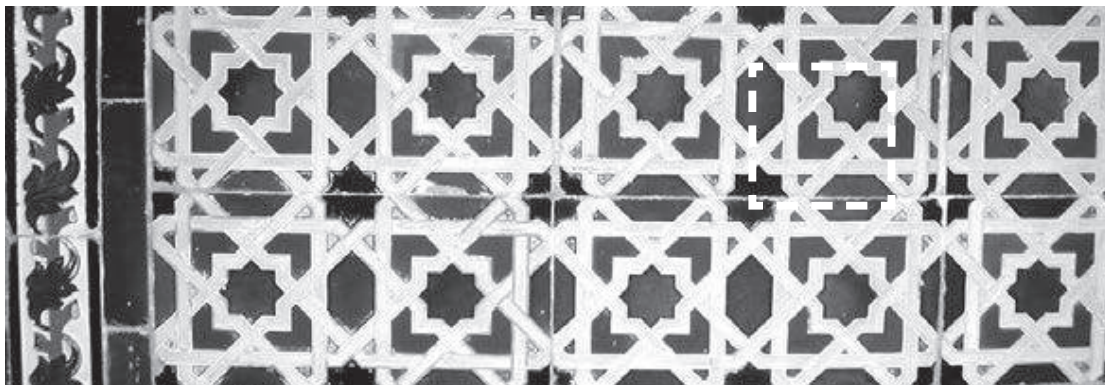


Figure 2 : Repérage d'un élément constitutif de la mosaïque



Figure 3 : Agrandissement d'un élément constitutif de la mosaïque de Grenade

L'enseignant peut poursuivre cette observation en distribuant aux élèves la frise qu'ils pourront plier et découper comme ils le souhaitent afin de déterminer l'élément constitutif de la mosaïque le plus petit possible : l'élément minimal. Les élèves pourront être répartis en groupes pour faciliter les échanges d'idées et les manipulations nécessaires. Ils devront alors sortir de leurs références verticales et horizontales : un axe de symétrie oblique se dégagera. En effet, en plus des axes verticaux et horizontaux qui correspondent aux pliages successifs, il faudra prendre en compte la diagonale du carré de l'élément travaillé jusqu'alors. Un nouveau débat (ou bien une production écrite) pourra être engagé en demandant aux élèves les raisons pour lesquelles il est certain que le triangle rectangle ainsi obtenu correspond à l'élément minimal. D'une part il permet la construction de la mosaïque entière, et d'autre part c'est le plus petit car il ne possède plus d'axe de symétrie, il ne peut donc plus être réduit. Une seconde question pourra être proposée : le découpage du carré selon son autre diagonale aurait-il fourni un nouvel élément minimal ? En conclusion, il est important que les élèves repèrent qu'un axe de symétrie, c'est-à-dire la droite selon laquelle il faut plier, peut être horizontal, vertical ou oblique. Cet axe peut, par exemple, être mis en évidence grâce au film d'animation. En exercice, il sera intéressant de considérer un axe oblique qui ne soit pas à 45° avec l'horizontale.



Figure 4 : Éléments minimaux

Dans la suite, nous proposons plusieurs activités, indépendantes les unes des autres, qui permettent aux élèves de s'approprier progressivement le concept mathématique de symétrie axiale. La réalisation effective de la dernière d'entre elles est assez difficile et ne pourra donc pas être exigée de tous.

L'étoile décalquée

Le but est de construire, de deux manières différentes, une première étoile qui sera à la base de l'activité suivante : la frise d'étoiles. Cette construction permet une première identification entre pliage et axe de symétrie.

Dans un premier temps, les traits pleins de la figure 5a sont à reproduire sur une feuille de papier-calque. L'élève doit alors plier le long des pointillés afin de reproduire la figure dans les trois quarts restants. Le résultat attendu est la figure 5b. Dans un second temps, l'enseignant prend soin de reproduire la figure 5a sur papier blanc et l'élève doit la compléter sans utiliser la feuille de papier-calque. Il est nécessaire de choisir un papier suffisamment épais pour que l'élève ne puisse pas voir par transparence. Ainsi, il doit mettre en place une procédure pour remplacer la reproduction par transparence et par pliage. Néanmoins, il peut à nouveau plier convenablement sa feuille mais seulement pour visualiser puis valider la figure obtenue.

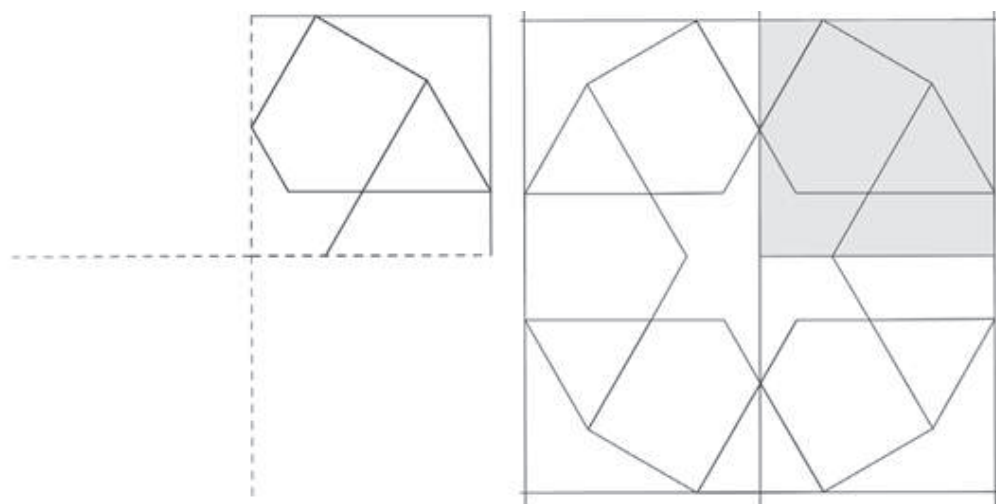


Fig. 5a.

Fig. 5b.

Figure 5 : L'étoile décalquée

La frise d'étoiles

Cette deuxième activité propose la construction d'une frise dont l'élément central est l'étoile à six branches précédemment construite.

Le premier travail sur cette frise est purement géométrique : il consiste à prolonger la frise, dont les deux premiers éléments sont déjà construits. Pour cela, l'élève est laissé libre pour mener son projet à bout. À la suite

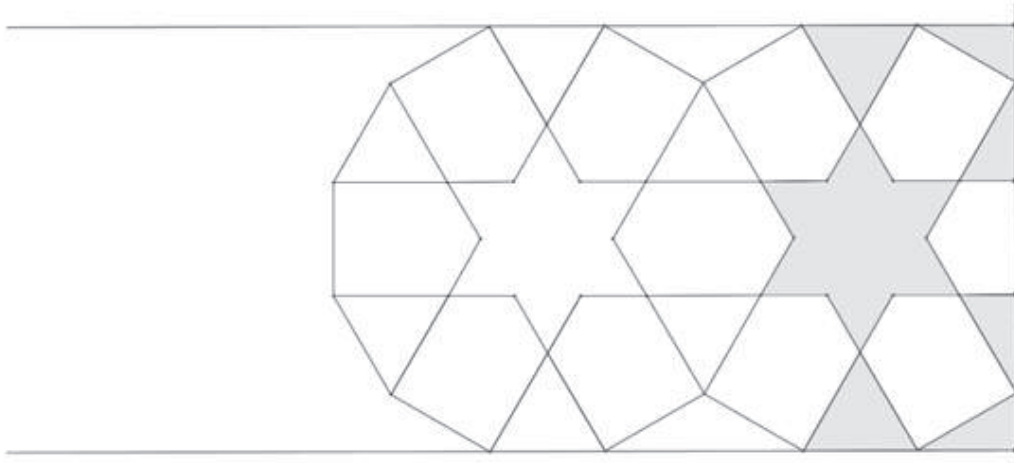


Figure 6 : La frise d'étoiles

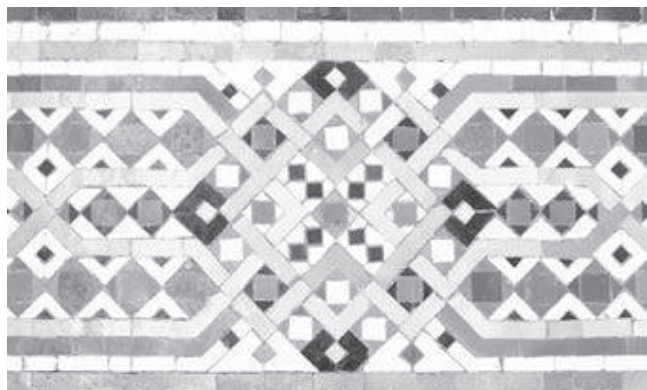
de la construction, l'enseignant provoque un débat dans la classe sur les différents procédés mis en œuvre. Bien sûr, tous les élèves doivent être amenés à « matérialiser » les axes de symétrie à l'aide d'une droite.

Le but essentiel est de comprendre que le principe fondamental d'une frise repose sur la répétition de figures, répétition possible par pliage ou par... symétrie axiale.

Introduisons la couleur

La frise peut, dans un premier temps, être coloriée à l'aide d'une seule couleur, comme y incite la figure 6. C'est alors l'occasion d'étudier la façon de colorier la frise pour ne pas « perdre » la symétrie. L'élève doit convoquer les résultats précédents sur la notion d'axe de symétrie, avec éventuellement l'exécution mentale d'un pliage. Mais, dans un deuxième temps, avec l'introduction d'une variation de couleurs, la frise étoilée est aussi l'occasion d'une digression numérique.

L'enseignant définit une suite de n ($n \geq 2$) couleurs. Le but est alors de déterminer la couleur



Détail d'une frise moderne
de la grande mosquée Hassan II
à Casablanca (xx^e siècle)

Les Découvertes en pays d'Islam

de la p -ième étoile. Il est intéressant d'augmenter progressivement le rang p (c'est-à-dire sa position dans la frise, à savoir la p -ième étoile) de l'étoile dont on désire connaître la couleur. Pour un rang p suffisamment petit, c'est-à-dire correspondant à une étoile représentée sur la frise, l'élève observe simplement la couleur cherchée. Mais, pour p relativement grand (sans aucun majorant), il doit mettre en place une nouvelle stratégie :

- si $n = 2$, la recherche mène l'élève à identifier la couleur d'une étoile avec la parité ou l'imparité de son rang ;
- si $n > 2$, l'élève doit faire appel à l'interprétation du reste de la division euclidienne de p par n .

Par exemple, l'enseignant définit une suite ordonnée de $n = 3$ couleurs (bleu, orange, vert) et donne ensuite aux élèves un nombre p pour connaître la couleur *a priori* de l'étoile de rang p . La recherche doit être progressive, p doit prendre des valeurs de plus en plus grandes.

Prenons quelques exemples avec p suffisamment grand pour décrire la démarche de l'élève :

- soit $p = 158$. La division euclidienne de 158 par 3 donne la relation : $158 = 3 \times 52 + 2$. L'interprétation de cette relation nous permet de décrire la frise : il y aura 52 séries de trois couleurs et deux étoiles supplémentaires. Ces deux étoiles seront, dans l'ordre, bleue et orange. En conclusion, la 158^e étoile sera orange ;
- soit $p = 241$. Alors $241 = 3 \times 80 + 1$. La frise sera construite avec 80 séries de trois couleurs, et la 241^e étoile sera donc bleue ;
- soit $p = 345$. Alors le reste de la division euclidienne est 0 car $345 = 3 \times 115$. La 345^e étoile sera alors verte.

Ces trois exemples suffisent à décrire tous les cas puisque la division euclidienne par 3 ne peut avoir que trois restes possibles : 0, 1, 2.

L'enseignant peut ensuite donner une nouvelle valeur de n plus importante et, à nouveau, différentes valeurs pour p . Cette recherche numérique est propice à un exercice d'écriture. Elle peut même être envisagée dans le cadre d'une narration de recherche. L'élève devra ainsi raconter et expliquer sa démarche qui, dans ce cadre, est expérimentale, en faisant appel à son vécu scolaire et à ses connaissances théoriques. Cette activité peut intervenir soit en rappel, soit en introduction à la division euclidienne.

L'étoile à huit branches : deux carrés entrecoupés

Contemporain de Louis XIV, Moulay Ismaïl (1645-1727) devient sultan du Maroc en 1672. Au début de son règne, il choisit Meknès comme capitale de son royaume. Son mausolée, c'est-à-dire le lieu où repose son corps, est une mosquée de cette ville construite en 1703. On y trouve de très belles mosaïques, construites notamment autour de l'étoile à huit branches. Voici deux exemples qui peuvent être le point de départ d'une nouvelle observation dont le but sera la construction effective de l'étoile à huit branches. L'enseignant doublera cette observation d'une phase d'écriture en demandant un programme de construction de cette même étoile.

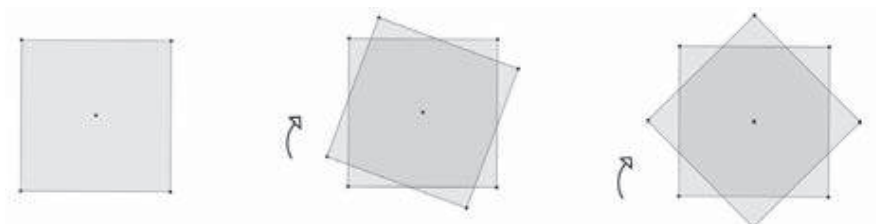


Détail d'une frise
du mausolée de Moulay Ismaïl
à Meknès (xviii^e siècle)



Fontaine du patio
du mausolée de Moulay Ismaïl
à Meknès (xviii^e siècle)

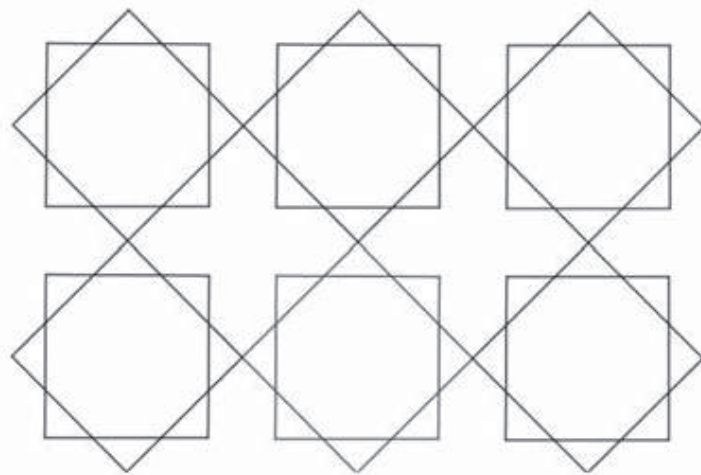
En fonction des textes rédigés par les élèves, l'enseignant sera amené à donner une construction de l'étoile comme superposition de deux carrés. L'un des deux doit faire un quart de tour sur l'autre autour de son centre. C'est l'occasion d'aborder une nouvelle transformation géométrique : la rotation. Celle-ci n'est pas au programme de l'école mais elle peut être utile pour montrer que la symétrie axiale n'est pas la seule transformation géométrique existante.



Rotation du
carré autour
de son centre

Les Découvertes en pays d'Islam

L'une des mosaïques les plus rencontrées avec cette étoile est le pavage croix-étoiles suivant :



Mosaïque de croix
et d'étoiles à huit points

L'étoile à huit branches est idéale pour appréhender la notion d'axe de symétrie par le pliage/découpage. En effet, l'élève équipé d'une feuille de papier carrée et d'une paire de ciseaux a pour mission de retrouver l'étoile à huit branches en donnant le moins possible de coups de ciseaux. L'élève doit en fait retrouver l'élément minimal (voir la figure 7a) structurant le motif général (voir la figure 7b), à savoir,



Figure 7a : Élément de base
de l'étoile à huit branches

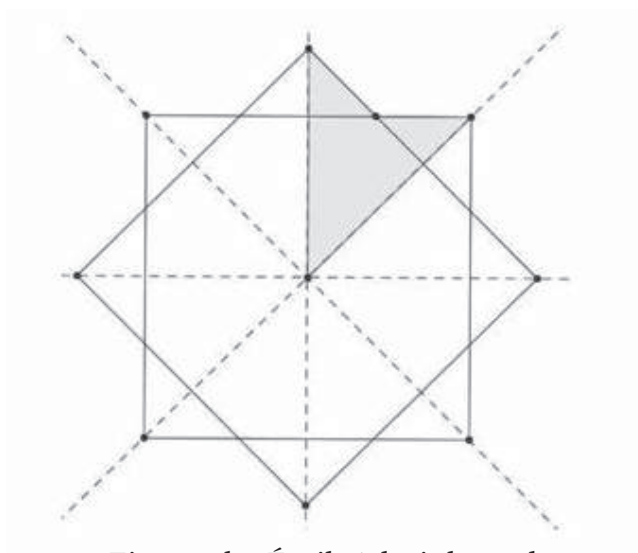
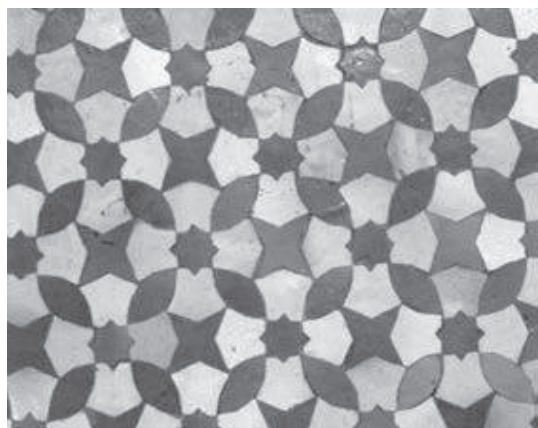


Figure 7b : Étoile à huit branches
et axes de symétrie

L'élève arrive au résultat par trois pliages successifs : deux pliages parallèles aux côtés et un pliage diagonal par exemple.

Construire un pavage à partir d'une enveloppe : un projet collaboratif

Cette quatrième activité permet à l'élève de « paver le plan », c'est-à-dire de remplir un espace à deux dimensions (dont un échantillon pourrait être une feuille de papier, un mur de la classe, etc.) sans laisser de place vide. Le pavage est un procédé de décoration très utilisé dans l'art islamique dont voici quelques illustrations. Celles-ci peuvent être montrées, en exemple, aux élèves en les imprimant sur un transparent pour rétroprojecteur. Les deux font apparaître l'étoile à huit branches précédemment réalisée.



Pavage du mausolée
de Moulay Ismaïl à Meknès
(xviii^e siècle)



Pavage d'un banc de la mosquée
Hassan II à Casablanca
(xx^e siècle)

Cette activité repose sur la propriété des parallélogrammes, qui pavent le plan quelles que soient leurs dimensions, leurs formes (parallélogrammes quelconques, rectangles, carrés ou losanges). Nous prendrons donc comme forme de base un rectangle que nous « transformerons » par symétries successives.

Chaque élève construit un élément du pavage, et l'enseignant rassemble toutes les productions pour composer celui-ci. Il est important de prévenir les élèves de cet objectif afin qu'ils sachent que la réussite globale du projet repose sur chacune de leurs contributions. Une précision fine du tracé géométrique ainsi que du découpage est nécessaire.

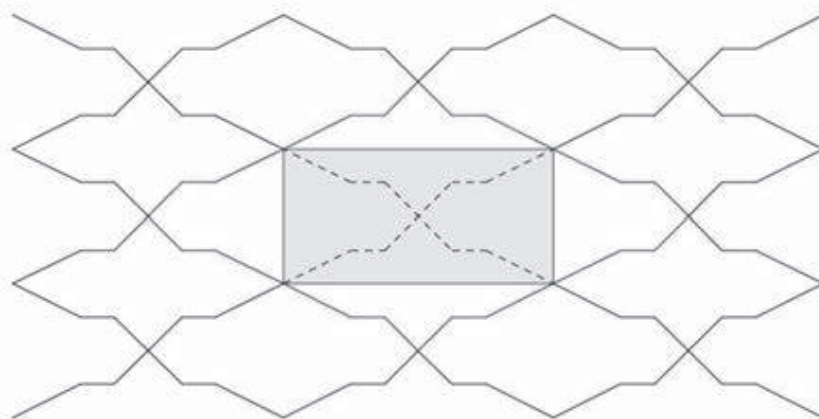
Le point de départ de l'activité est une enveloppe rectangulaire de format quelconque et de préférence autocollante.

Tout d'abord, l'élève représente sur le dos de l'enveloppe les segments pointillés en suivant le programme de construction suivant :

Les Découvertes en pays d'Islam

- tracer les diagonales de l'enveloppe ;
- placer le milieu des quatre moitiés des diagonales ;
- relier ces milieux deux à deux dans le sens de la longueur ;
- placer le quart et le trois-quarts de chacun des segments obtenus ;
- relier deux à deux, en diagonale, les points obtenus. Ces deux segments se coupent au centre du rectangle.

Ensuite, il coupe le long des pointillés une seule face de l'enveloppe. Enfin, il développe les morceaux latéralement pour obtenir l'élément de base du pavage. Il est temps pour l'enseignant et les élèves de rassembler tous les éléments... Ce travail pourra être produit à partir d'enveloppes de différentes couleurs afin de mieux mettre en évidence le pavage obtenu.



Le pavage par l'enveloppe

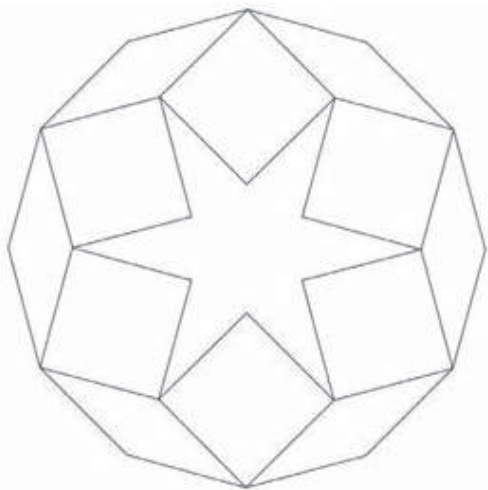
Symétrie axiale : constructions

Le dodécagone peut être obtenu de multiples manières. L'une des plus simples est sans doute celle obtenue par la construction de trois carrés inscrits dans un cercle de base. Cette dernière activité se décompose en quatre étapes indépendantes les unes des autres. Nous précisons à nouveau qu'elle constitue une activité difficile qui doit être réservée aux élèves qui auraient parfaitement assimilé les activités précédentes.

Première étape : les axes de symétrie

L'élève doit commencer par repérer les axes de symétrie de la figure ci-dessous et la colorier de façon à conserver tous ces axes. L'enseignant lui demande quel est le nombre maximum de couleurs qu'il peut utiliser.

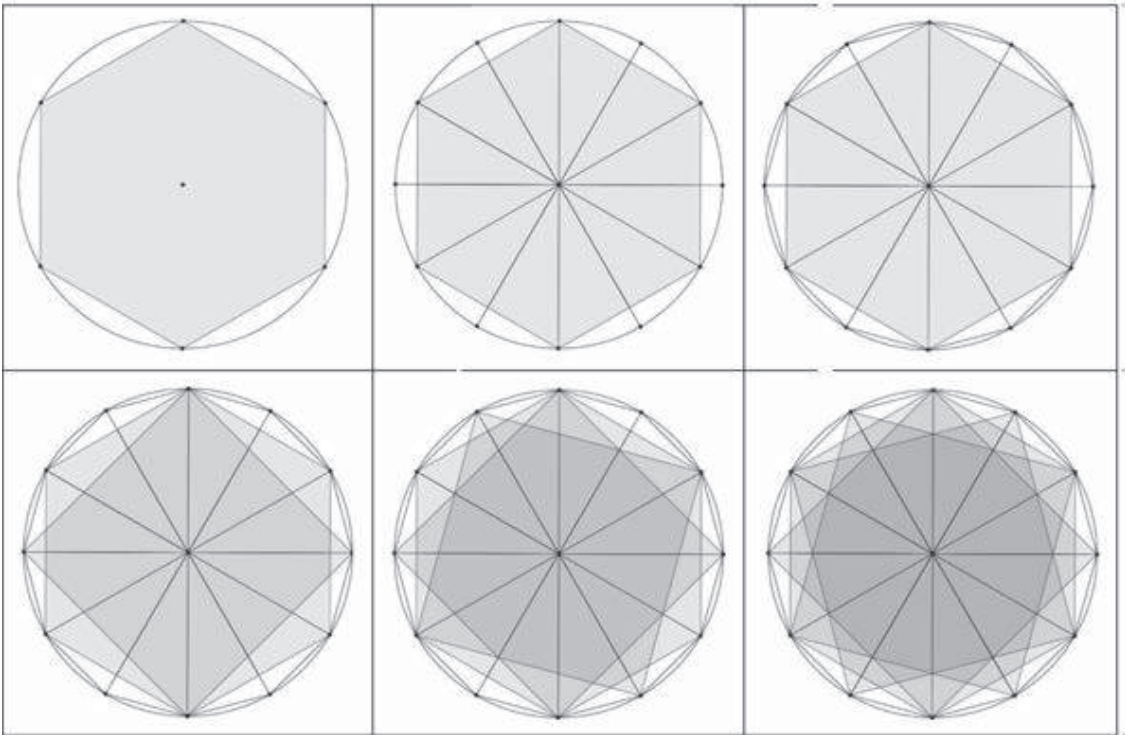
À cette occasion, l'élève prend conscience du faible degré de liberté dont il dispose dans le choix des couleurs compte tenu du nombre d'axes. En effet, la couleur d'une zone impose celle de la zone symétrique. Les symétries repérées décident de la répartition des couleurs dès le départ pour chacune des figures isolées (losange, carré, branche d'étoile).



Le dodécagone étoilé

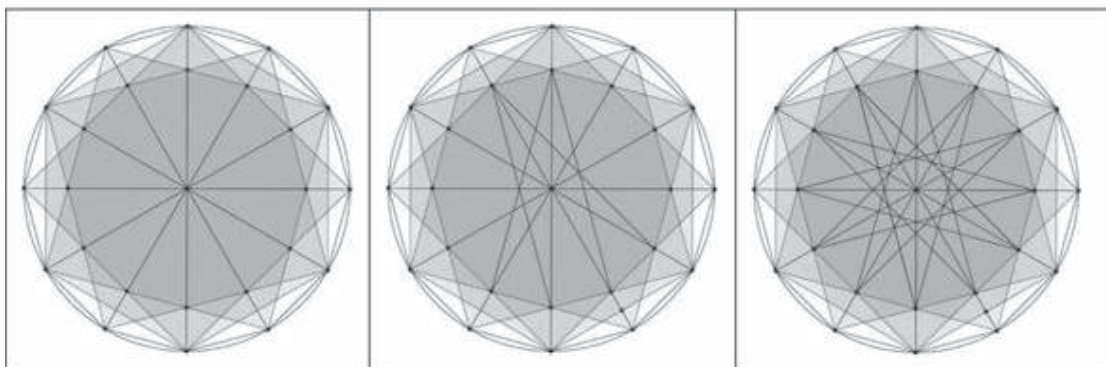
Ensuite, l'enjeu est la construction effective de la figure. Un programme de construction risque d'être fastidieux à suivre pour l'élève et ne présente pas d'intérêt particulier. L'élève est amené à suivre la « bande dessinée » présentée ci-dessous dont seule une observation raisonnée lui permettra la construction finale. L'enseignant pourra demander à l'élève d'écrire, au fur et à mesure, les tâches réalisées à l'aide du vocabulaire approprié (cercle, centre, hexagone, diamètre, milieu, carré, etc.).

Deuxième étape : l'imbrication des carrés



Les Découvertes en pays d'Islam

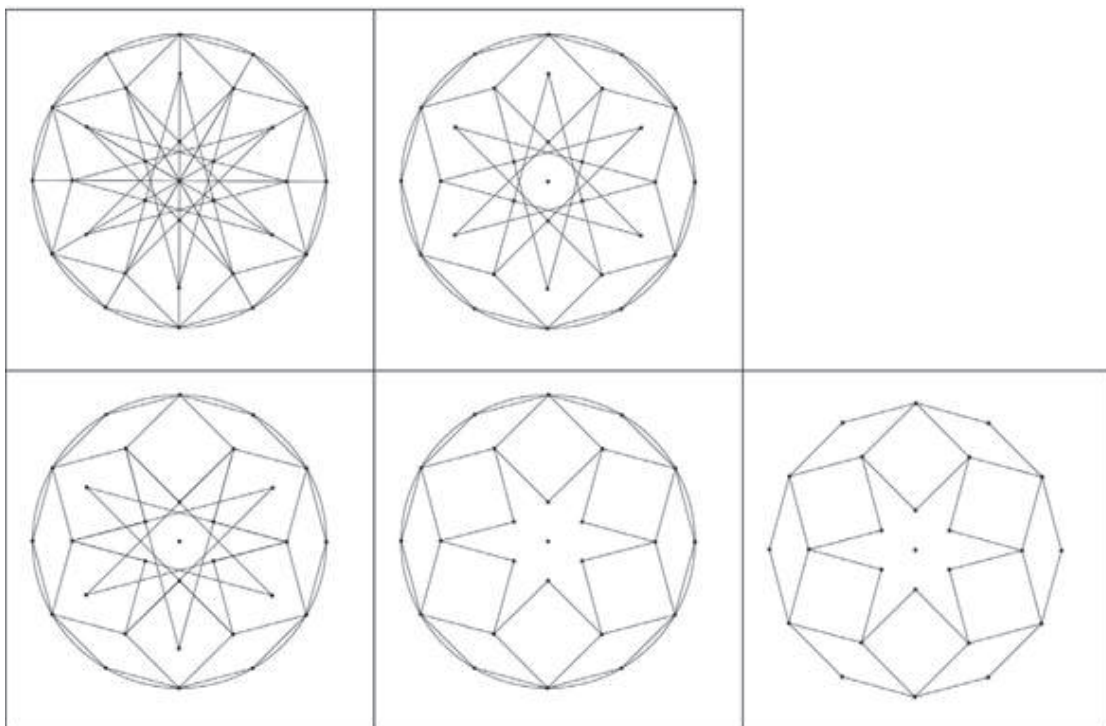
Troisième étape : l'étoile centrale à douze branches



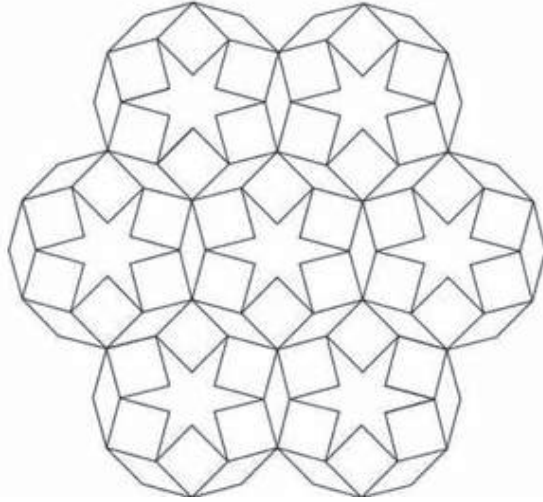
Remarque : il est possible de conserver l'étoile à douze branches pour le pavage final, mais il est évident que la tâche sera alors moins évidente.

Quatrième étape : l'élaboration du motif final

Il s'agit de l'étape la plus difficile du point de vue de l'observation mais aussi de la réalisation puisqu'il faut effacer. Mais, là encore, c'est la symétrie qui est à l'œuvre...



Enfin, l'enseignant reproduit le pavage suivant, sous la forme d'un poster A3 à afficher au tableau par exemple, en proposant aux élèves de l'imiter en partant de leurs propres constructions.



Répétition du dodécagone par symétrie

Conclusion

Ces activités ont un double objectif. Elles permettent d'abord de découvrir, de définir et de construire la symétrie dans les classes. Ensuite, elles concourent au développement culturel des élèves en leur offrant une opportunité de découvrir une civilisation à travers son art.

Toutefois, ces activités peuvent aussi participer à l'élaboration d'une représentation erronée chez l'élève. En effet, elles peuvent laisser croire que la symétrie ne serait qu'une construction humaine consciente et réfléchie conçue pour atteindre le Beau. Pour terminer l'étude sur la symétrie, il sera donc indispensable d'observer quelques manifestations « naturelles » de celle-ci.

La cristallographie décrit les structures et les propriétés des cristaux à partir de l'analyse de leurs symétries. Les cristaux de glace fournissent probablement les exemples les plus communs pour les élèves : les flocons de neige. Tous différents, ils sont néanmoins tous caractérisés par une même structure hexagonale. Une série de photographies de cristaux de neige peut être, par exemple, le support d'une évaluation sur les axes de symétrie.

Les êtres vivants (faune et flore) peuvent aussi faire l'objet d'observations. Fleurs, papillons, coquillages, alvéoles des ruches, etc., sont autant de témoignages naturels de la symétrie que tous les élèves ont sans doute déjà repérés.

Les Découvertes en pays d'Islam

Bibliographie

André Deledicq, *Jeux de symétries*, Paris, ACL-Les éditions du Kangourou, 2001.

Ahmed Djebbar, « Mathématiques et arts en pays d'Islam », *Textes et Documents pour la classe*, n° 883, *La Symétrie*, 2004.

Expériences de narration de recherches en mathématiques, Paris, ACL-Les éditions du Kangourou, IREM de Paris 7, 2002.

Bernard Maitte, « Cristaux : des formes à la structure », *Textes et Documents pour la classe*, n° 883, *La Symétrie*, 2004.

« Programmes de l'école primaire, cycle des approfondissements, cycle 3 », *B.O.*, n° 5, 12 avril 2007.

Le jeu favori de Nabil et de sa sœur Fadila était de résoudre les énigmes qui surgissaient dès qu'ils se mettaient à observer ce qui se passait autour d'eux, ou en eux. Ils étaient d'autant plus passionnés qu'avec le temps, un peu de magie s'en mêlait, comme le jour où ils voulurent comprendre le secret des étonnants dessins qui décoraient les murs de leur maison...

Ce jour-là, il faisait si chaud que Nabil et Fadila étaient restés chez eux. Ils somnolaient dehors, à l'ombre, doucement bercés par le bruit de la petite fontaine située au centre de la cour intérieure. Ce repos fut de courte durée car ils furent bientôt délogés par des artisans qui venaient réparer le mur contre lequel ils s'étaient installés. Les hommes posèrent sur le sol des piles de carreaux de céramique et leur recommandèrent de ne rien toucher jusqu'à leur retour. Il n'en fallait pas plus à Nabil et Fadila, bien réveillés à présent, pour être piqués par la curiosité. Restés seuls, ils se regardèrent malicieusement. Nabil se mit debout pour observer les dessins de la partie du mur encore intacte, tandis qu'Fadila, par terre, commençait à étaler les carreaux.

— Nabil, regarde, si je prends un carreau dans chacune de ces deux piles, je vois que celui de droite est inversé par rapport à celui de gauche... comme mes mains !

Et elle contempla le dos de ses mains tendues devant elle et fit se toucher le pouce droit et le pouce gauche. Puis elle les retourna, paumes tournées vers elle, l'auriculaire droit touchant le gauche. Tout excitée, elle commença à associer les carreaux deux par deux, puis s'arrêta, perplexe. Malgré les contorsions qu'elle faisait subir à ses mains, elle ne savait comment continuer.

Pendant ce temps, Nabil suivait des yeux les méandres de la décoration du mur, l'air absorbé. Il houspilla sa sœur :

Les Découvertes en pays d'Islam

— Arrête donc de t'agiter ! J'essaie de comprendre comment on peut faire des dessins si compliqués avec de si petits carreaux !

— Chut, aide-moi vite à ranger, Nabil, les hommes reviennent !

Ils remirent précipitamment les carreaux en piles. L'un des ouvriers les interpella :

— Tiens, tiens, on dirait que les carreaux sont dérangés ! Y auriez-vous touché ?

Nabil et Fadila ouvrirent de grands yeux innocents. L'homme sourit et reprit la parole :

— Alors, ça vous amuserait de voir comment nous travaillons ?

Un sourire illumina le visage des enfants. Ils s'assirent donc dans un coin et observèrent. La piste proposée par Fadila était la bonne, mais les ouvriers utilisaient plusieurs types de carreaux pour parvenir aux grands motifs du mur, et le spectacle était fascinant. Chacun travaillait de son côté, mais tous ensemble participaient à une harmonieuse décoration monumentale. Les dessins se répétaient, et on ne voyait plus où ils commençaient et où ils finissaient.

Au bout d'un moment, Nabil fronça les sourcils et chuchota à l'oreille de sa sœur :

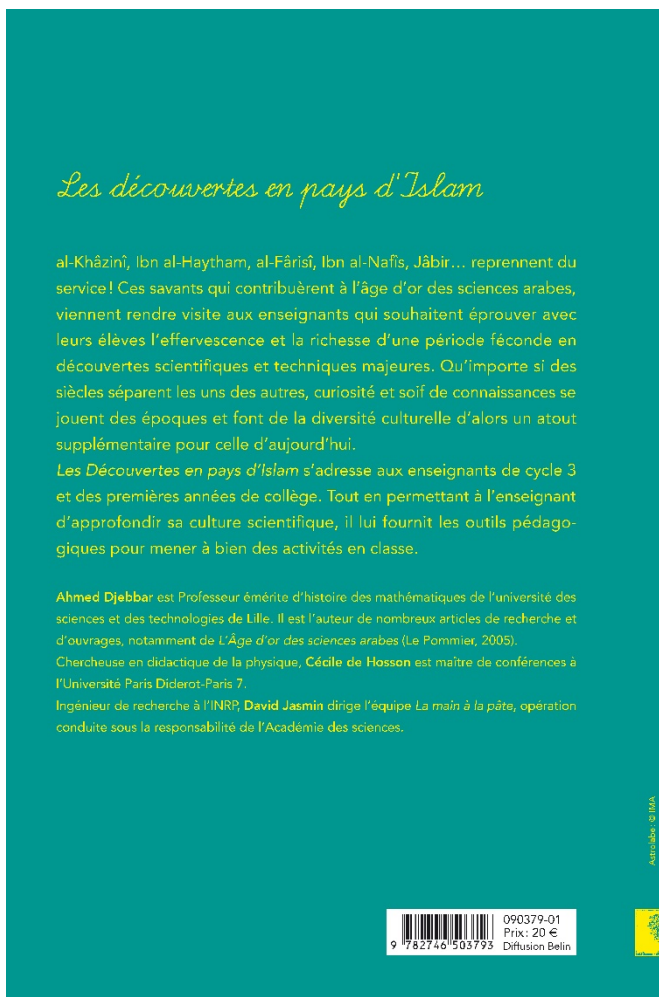
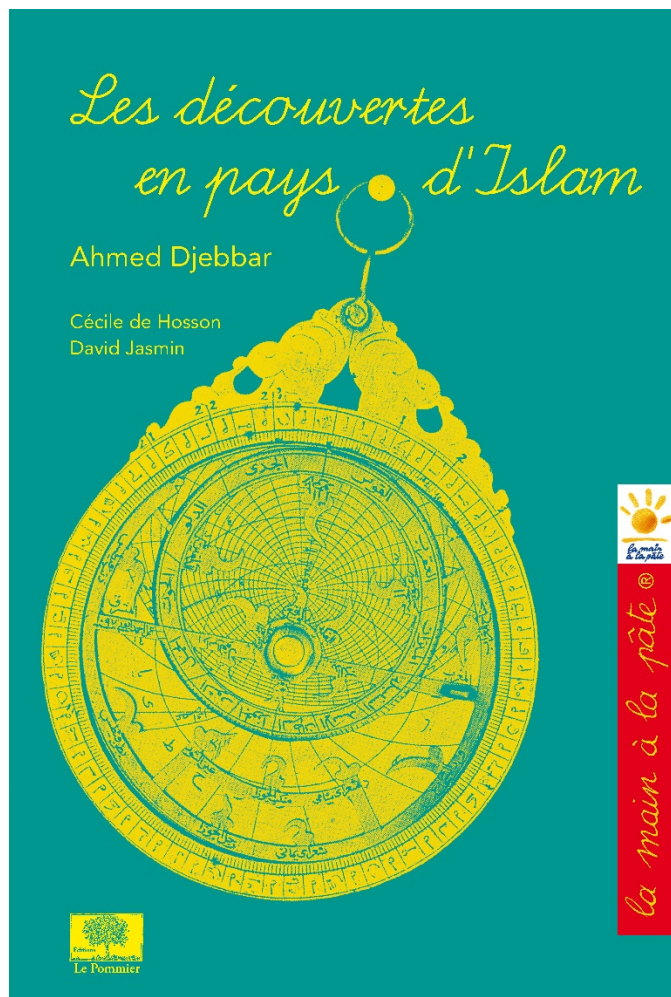
— Comment chacun sait-il ce qu'il doit faire ? Les dessins se répètent, mais comment connaissent-ils le début ? Et puis...

Il fut interrompu par l'irruption d'un homme dans la cour, qui se présenta simplement :

— Bonjour, je m'appelle al-Kâshî, et vos questions, je me les suis posées moi aussi ! Si vous aimez la géométrie, vous pourrez retrouver grâce à elle ce que les artisans ont réalisé sans la connaître. Voulez-vous que je vous en parle ici ? Venez, nous allons nous placer devant ce beau mur. Regardez...

Ce qui se passa ensuite ne nous est pas parvenu, c'était il y a si longtemps, la mémoire s'est perdue ! Il n'en reste pas moins que ce sont en effet d'habiles artisans qui ont les premiers utilisé les secrets de la symétrie avant que des savants comme al-Kâshî ne s'y intéressent à leur tour. Et d'une manière ou d'une autre, comme ils ont autrefois accompagné Nabil et Fadila, ils accompagnent aujourd'hui tous ceux et toutes celles qui se posent les mêmes questions. D'une manière ou d'une autre...

Cette ressource est issue du projet thématique *Les découvertes en pays d'Islam*, paru aux Éditions Le Pommier.



Retrouvez l'intégralité de ce projet sur : <https://www.fondation-lamap.org/projets-thematiques>.

Fondation *La main à la pâte*

43 rue de Rennes

75006 Paris

01 85 08 71 79

contact@fondation-lamap.org

Site : www.fondation-lamap.org

 FONDATION
La main à la pâte
POUR L'ÉDUCATION À LA SCIENCE